I-3 Topología de los conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^n$

- El estudio del cálculo con funciones de varias variables requiere el manejo de algunas nociones sobre la topología de conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^n$. La topología es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades que se mantienen invariantes bajo transformaciones o deformaciones continuas. Estas propiedades reciben el nombre de propiedades topológicas.

- Empezamos introduciendo la noción de bola abierta

Def [Bola abierta]

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se llama bola abierta de centro en x y radio r, y se denota por $B_r(x)$, al siguiente conjunto de puntos

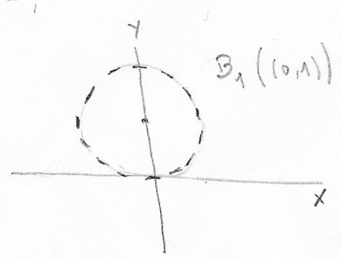
$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) = \|y-x\| < r \}.$$

Notemos que la desigualdad en la definición de bola abierta es una desigualdad estricta.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, la bola abierta de radio 1 y centro en el punto $(0,1)$ es el conjunto de puntos que satisfacen

$$\|(x,y)-(0,1)\| < 1 \iff x^2+(y-1)^2 < 1$$

es decir el disco de radio unidad centrado en el punto $(0,1)$, excluyendo los puntos de la circunferencia $x^2+(y-1)^2 = 1$



- Resulta útil también el concepto de bola abierta perforada

Def [Bola abierta perforada]

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se llama bola abierta perforada de centro en x y radio r, y se denota por $B'_r(x)$ al siguiente conjunto de puntos

$$B'_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|y-x\| < r \}.$$

La bola abierta perforada $B'_r(x)$, es pues la bola abierta $B_r(x)$ de la que se ha extraído su centro.

• Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, la situación del punto x con respecto al conjunto A, se clasifica en interior, exterior o frontera.

Def [Pto. interior, exterior, frontera]

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que

i) x es un punto interior a A, si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$

ii) x es un punto exterior a A, si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n - A$

iii) x es un punto frontera de A, si $\forall r > 0$ se tiene $\begin{cases} B_r(x) \cap A \neq \emptyset \\ \quad y \\ B_r(x) \cap \mathbb{R}^n - A \neq \emptyset \end{cases}$

• Es decir un punto x es interior a un conjunto A, cuando se puede encontrar una bola abierta centrada en el punto x que está enteramente contenida en A.
x es exterior a A, cuando se puede encontrar una bola abierta centrada en x que está completamente contenida en el conjunto complementario de A.
x es frontera de A, cuando no es ni exterior ni interior, es decir cuando cualquier bola abierta centrada en x (por pequeño que sea su radio) tiene intersección no vacía con A y con su complementario.

• De acuerdo con esta definición, con cada subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos asociada una partición del espacio total $\mathbb{R}^n$, en tres subconjuntos disjuntos dos a dos, que llamaremos interior de A, exterior de A, y frontera de A, que denotaremos por $\mathring{A}$, $\text{ext}\,A$ y ∂A respectivamente

$$\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es interior a } A\}$$

$$\text{ext}\,A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es exterior a } A\} = \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n - A)}$$

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es frontera de } A\}$$

y satisfacen

$$\mathring{A} \cup \text{ext}\,A \cup \partial A = \mathbb{R}^n$$

$$\mathring{A} \cap \text{ext}\,A = \emptyset, \quad \mathring{A} \cap \partial A = \emptyset, \quad \text{ext}\,A \cap \partial A = \emptyset$$

- Notemos que los puntos interiores a un conjunto A, siempre pertenecen a dicho conjunto ($\mathring{A} \subset A$), y los puntos exteriores a A nunca pertenecen a A, $\text{ext}\,A \subset \mathbb{R}^n - A$. Los puntos frontera de A, pueden pertenecer o no al conjunto A.

- Además de la clasificación de los puntos de $\mathbb{R}^n$ en interiores, exteriores o frontera con respecto a un conjunto A, existen otras dos situaciones interesantes que son las de punto aislado y punto de acumulación.

Def [Puntos aislados y de acumulación]

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que

i) x es un punto aislado de A, si $\exists r > 0$, tal que $B_r(x) \cap A = \{x\}$

ii) x es un punto de acumulación de A, si $\forall r > 0$ se tiene $B'_r(x) \cap A \neq \emptyset$

- Es decir, los puntos aislados de un conjunto son aquellos tales que a su alrededor podemos encontrar una bola abierta (aunque sea pequeña) que no contiene ningún otro punto del conjunto; y los puntos de acumulación, son aquellos tales que cualquier bola con centro en dicho punto, contiene algún otro punto del conjunto. Los puntos aislados de un conjunto A siempre pertenecen a dicho conjunto, mientras que los puntos de acumulación de A pueden pertenecer, o no, a A.

- Es fácil convencerse (o demostrar) que son ciertas las siguientes afirmaciones

- Todos los puntos de acumulación de un conjunto A, son o bien interiores a A o bien frontera de A.
- Todos los puntos interiores son puntos de acumulación.
- Los puntos aislados de un conjunto son siempre puntos frontera.
- Los puntos frontera de un conjunto son o bien puntos aislados o bien puntos de acumulación.
- En un conjunto formado por un número finito de elementos, todos sus puntos son aislados.

- Si $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A, $\forall r>0$, la bola abierta $B_r(x)$ (por pequeño que sea r) contiene siempre infinitos elementos diferentes de A.

· Reuniendo los puntos aislados y de acumulación de un cierto conjunto A, se forma un nuevo conjunto que se llama cierre del conjunto A

Def [Cierre de un conjunto]

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se llama cierre de A, y se denota por $\bar{A}$ al conjunto

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es pto. aislado o de acumulación de } A\}$$

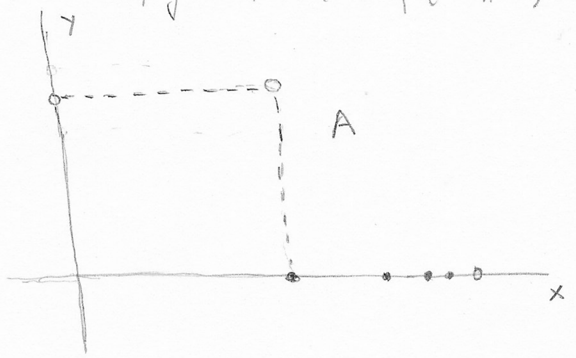
El cierre de un conjunto A cumple

$$\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \supset A$$

es decir, el cierre de un conjunto A está formado por los puntos interiores y los puntos frontera, y contiene al propio conjunto A.

Ejemplo: Consideremos el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, \ y \ 0 \leq y < 1\} \cup \{(2-\tfrac{1}{n}, 0);\ n = 1, 2, \dots\}$$



Entonces

$$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \ y \ 0 < y < 1\}.$$

$$\partial A = \{(x,y) \mid x = 0, \ y \ 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid x = 1, \ y \ 0 \leq y \leq 1\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \mid y = 0, \ y \ 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid y = 1, \ y \ 0 \leq x \leq 1\} \cup$$

$$\cup \{(2-\tfrac{1}{n}, 0) \ n = 1, 2, \dots\} \cup \{(2,0)\}.$$

$$\text{ext}\, A = \mathbb{R}^n - (\mathring{A} \cup \partial A)$$

Puntos de acumulación de $A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(2,0)\}$

Puntos aislados de $A = \{(2-\frac{1}{n}, 0) ; n = 2, 3, \dots\}$

. A continuación introducimos los conceptos abiertos, cerrados y compactos.

Def [conjunto abierto].

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice abierto cuando todos sus elementos son puntos interiores, es decir A es abierto $\Longleftrightarrow A = \mathring{A}$

· Los conjuntos abiertos satisfacen las siguientes propiedades

i) $\mathbb{R}^n$ y ϕ son abiertos

ii) La unión de una colección finita o infinita de abiertos es un conjunto abierto

iii) Si A y B son conjuntos abiertos, su intersección $A \cap B$ es también un conjunto abierto.

· El conjunto vacío es abierto por convenio. Las otras propiedades se demuestran fácilmente a partir de la definición de conjunto abierto. De la propiedad iii) se sigue que la intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. Sin embargo la intersección de un colección infinita de abiertos puede no ser un conjunto abierto. Por ejemplo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}((0,0)) = \{(0,0)\}$$

es una intersección de infinitas bolas abiertas $B_{1/n}((0,0))$, que da como resultado el conjunto formado por un único punto $\{(0,0)\}$ no es abierto.

• Los conjuntos cerrados se definen como complementarios de los conjuntos abiertos.

Def [conjunto cerrado].

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice cerrado si y solo si su complementario es abierto.

• Los conjuntos cerrados contienen a todos sus puntos de acumulación, y a todos sus puntos frontera, y satisfacen por tanto $\bar{A} = A$. Al ser los conjuntos cerrados los complementarios de los conjuntos abiertos, los conjuntos cerrados satisfacen las siguientes propiedades

i) ϕ y $\mathbb{R}^n$ son cerrados

ii) La intersección de una colección finita o infinita de cerrados es un conjunto cerrado.

iii) Si A y B son conjuntos cerrados, su unión $A \cup B$ es también un conjunto cerrado.

. Sin embargo la unión de una colección infinita de cerrados puede no ser un conjunto cerrado. Por ejemplo

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1-1/n] = [0,1).$$

es una unión de intervalos cerrados $[0, 1-\frac{1}{n}]$ que da como resultado el intervalo semiabierto $[0,1)$ que no es cerrado.

Para terminar estas nociones de topología, definimos el concepto de conjunto compacto.

Def [conjunto compacto]. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Naturalmente, que un conjunto A es acotado significa que $\exists M > 0$, tal que $\forall x \in A$ se tiene $\|x\| \leq M$, es decir $A \subset B_M((0,0))$.